Übung 11 (16.05.25)

Recap

Als Recap dieser Woche lösen wir eine beliebte Prüfungsaufgabe. Ein DGL-System mit komplexen EW und EV.

Weitere Beispiele zu komplexen DGLS findet Ihr in diesen BPs: W16, W17, W18, S16, S21 (es gibt noch mehr)

Beispielaufgabe:

23. [**10 Punkte**] Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -8y(t) + 4y'(t). \qquad (*)$$

a) [**2 Punkte**] Verwandeln Sie $(*)$ in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?

b) [**6 Punkte**] Geben Sie die allgemeine reelle Lösung des in a) gefundenen Systems an.

c) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Lösung von $(*)$ zu den Bedingungen $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = 1$.

BP S 17

10/50 Punkte der Prüfung

Dieses Korollar aus der VL wird benötigt

Korollar

Ist Y eine komplexe Lösung von (H), so sind $\mathrm{Re}(Y)$ und $\mathrm{Im}(Y)$ reelle Lösungen von (H).

Achtung: Dies gilt nur wenn $A(x)$ eine *reelle* Matrixfunktion ist.

Repetition

Lineare Abbildungen:

Seien V und W reelle Vektorräume. Dann heisst

$$F: V \to W, \quad x \mapsto F(x)$$

lineare Abbildung falls $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

i. $F(x+y) = F(x) + F(y)$ und ii. $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

wenn wir nun prüfen wollen ob eine Abbildung linear ist, dann müssen wir prüfen ob i. und ii. gelten

Weitere Eigenschaften von linearen Abbildungen:

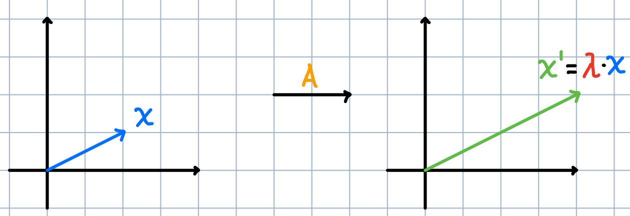
- 0 wird auf 0 abgebildet
- sind V und W endlichdimensional z.B. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, dann kann jede lineare Abbildung $F: V \to W$ durch eine $m \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto A x$$

A heisst dann Abbildungsmatrix von F

Eigenwertproblem:

Wir fragen uns, ob es bestimmte Eingabevektoren x gibt, welche durch die Abbildung $x \mapsto A x$ nur um einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht werden.



In diesem Fall muss folgendes gelten: $A x = x' = \lambda \cdot x$

Aus dem bekommen wir dann die allgemeine Gleichung:

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

Der Vektor welcher durch die Abbildung nur gestreckt bzw. gestaucht wird, nennt sich Eigenvektor.

Der Faktor λ, um welchen gestreckt bzw. gestaucht wird, wird Eigenwert genannt.

Eigenwerte:

Wir suchen ein λ sodass $Ax = \lambda x$ gilt. Wobei $x \neq 0$. Durch umstellen erhalten wir ein HLGS der Form:

$$(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$$

Wann hat dieses HLGS nur nicht triviale Lösungen ($x \neq 0$)?

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n \times n}$ äquivalent:

- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- $det(A) \neq 0$

Das HLGS hat nicht triviale Lösungen genau dann wenn $\boxed{\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0}$

Mit dieser Gleichung können wir nun λ bestimmen.

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{I})$ heisst characteristisches Polynom. Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann ist $p_A(\lambda)$ ein Polynom n-ten Grades.

Wenn ein EW eine doppelte Nullstelle in $p_A(\lambda)$ hat dann sagen wir, dass die algebraische Vielfachheit des EW, gleich 2 ist. Analog für einfache Nullstellen und Nullstellen höherer Ordnung.

Eigenvektoren:

Wir wissen nun wie wir EW bestimmen, nun müssen wir noch die dazugehörigen Eigenvektoren EV bestimmen. D.h. den Vektor x finden für welchen gilt:

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0).$$

Das Problem kann wieder zu $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ umgeschrieben werden. Nun setzen wir einen der EW ein und lösen das HLGS. Demnach sind die EV immer mit einem EW verbunden.

Da wir hier ein HLGS mit $\det = 0$ lösen wird es immer unendlich viele Lösungen für $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ geben, d.h. auch freie Parameter.

Normen:

Die Grundidee ist es die Grösse von Vektoren aus einem Vektorraum vergleichen. Dafür ordnen wir jedem Vektor v in einem Vektorraum eine reelle positive Zahl zu, da wir deren grösse gut vergleichen können.

Mathematisch lässt sich das wie folgt ausdrücken:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} \ , \quad v \mapsto \|v\|$$

Achtung! es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.

$\forall \ v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiele solcher Normen sind:

$$\text{Auf } \mathbb{R}^n \begin{cases} \|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} & \text{(Euklidische Norm)} \\ \|v\|_\infty := \max(|v_1|, \ldots, |v_n|) & \text{(Maximumsnorm)} \\ \|v\|_p := (|v_1|^p + \ldots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}} & (\text{p- Norm}, 1 \leq p < \infty) \end{cases}$$

$$\text{Auf } \mathbb{R}^{n \times m} \begin{cases} \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} & \text{(Hibert-Schmidt-Norm)} \\ \|A\|_{SM} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| & \text{(Spaltenmaximumsnorm)} \\ \|A\|_{ZM} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| & \text{(Zeilenmaximumsnorm)} \end{cases}$$

Skalarprodukte:

Wir haben nun ein Tool um die Grösse von Vektoren in einem Vektorraum zu vergleichen. In diesem nächsten Schritt wollen wir die Beziehung zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl beschreiben. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$\forall\ x,y,z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
3. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
4. $\langle x,x \rangle \geq 0$ und $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\langle x,y \rangle = 0$ dann sind x,y orthogonal $(x \perp y)$

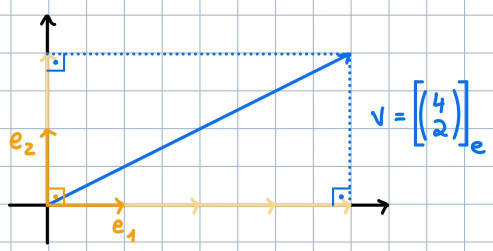
Mit dem Skalarprodukt kann eine Norm induziert werden.

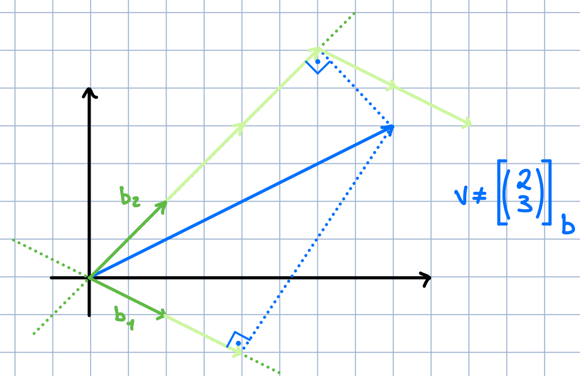
$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

Diese Norm erfüllt immer alle Bedingung für eine Norm, egal welches Skalarprodukt.

Orthonormalbasis:

Was ist überhaupt eine Orthonormalbasis (ONB)?





Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht zueinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal).

z.B.:

$$e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal projizieren.

Bei einer herkömmlichen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normal sein.

z.B.:

$$b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn nicht orthogonal projizieren. (LGS lösen)

Für eine Orthonormalbasis bedeutet das nun folgendes. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums V, dann gilt $\forall x \in V$:

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k}$$

Wie können wir nun eine solche Orthonormalbasis finden? Dazu benutzen wir das

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren:

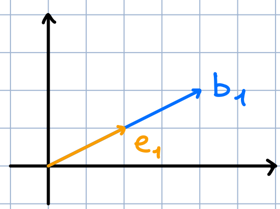
Dafür benötigen wir: eine beliebige Basis $B = \{ b_1, \dots, b_k \}$

ein beliebiges Skalarprodukt

und produzieren damit eine Orthonormalbasis $E = \{ e_1, \dots, e_k \}$

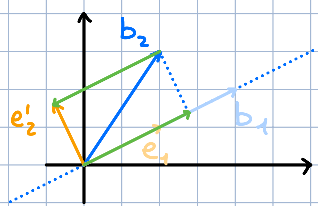
i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere ihn.

$$e_1 = \frac{b_1}{\| b_1 \|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$



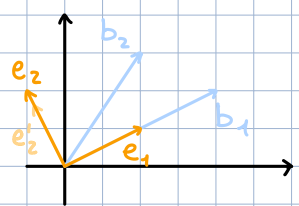
ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor b_2, ziehe zuerst den zu b_1 parallelen Teil ab

$$e_2' = b_2 - \boxed{\langle b_2, e_1 \rangle \, e_1}$$



und normiere ihn dann

$$e_2 = \frac{e_2'}{\| e_2' \|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$



iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\| e_i' \|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

Das kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!

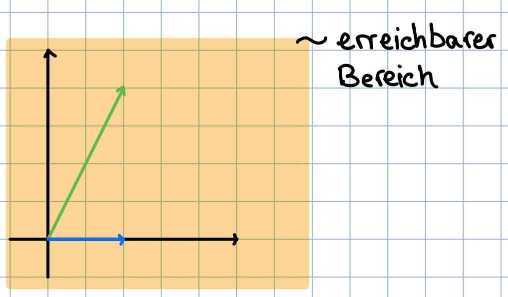
Bild:

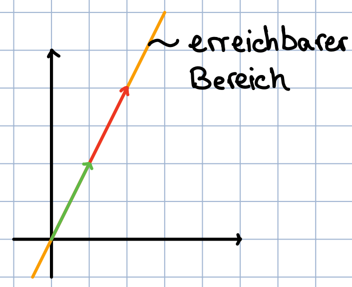
Ganz am Anfang von LinAlg I sahen wir die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3$$

Das heisst alle möglichen Vektoren die durch das Produkt Ax entstehen können, werden durch die Linearkombination der Spalten von A beschrieben. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2$$

Dieser „erreichbare Bereich" nennt sich **Bild** einer Matrix. Die Diemension des Bildes ist der Rang.

Mathematisch formuliert:

$$\boxed{\mathrm{Bild}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } y = Ax \}} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

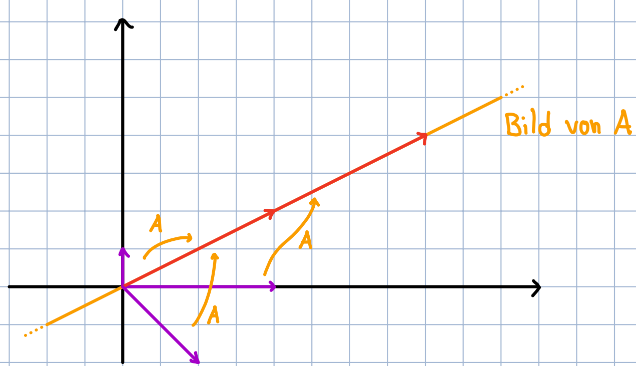
Kern:

Wie gerade gesehen, beschreibt das Bild einer Matrix den Raum auf welchen beliebige Vektoren x durch A abgebildet werden.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



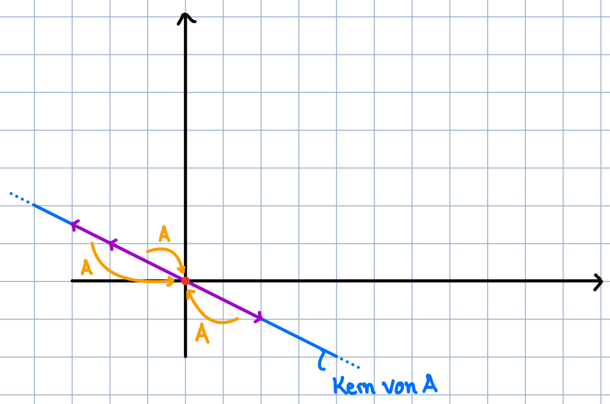
Wir fragen uns nun ob es Vektoren gibt die auf Null abgebildet werden.

D.h. wir suchen alle x, sodass $Ax=0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Mathematisch formuliert: $\boxed{\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}}$

Beziehung zwischen Kern und Bild:

i.) $\dim(\mathrm{Kern}) + \dim(\mathrm{Bild}) = n$

ii.) $\mathrm{Kern}(A^T) \perp \mathrm{Bild}(A)$

Basiswechsel:

Vektoren:

Koordinaten beschreiben um wie viel die Basisvektoren des assoziierten Vektorraums skaliert werden.

D.h. die Koordinaten hängen immer von den Basisvektoren ab! Wenn wir also von einer Basis in eine andere wechseln, müssen wir auch die Koordinaten ändern. Dafür führen wir das Konzept der Übergangsmatrix ein.

Nennen wir hierfür unsere Standartbasis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ und die andere Basis $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Wir wollen nun von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ transformieren.

Wir suchen also die Koordinaten eines Vektors aus $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

Mathematisch ausgedrückt

$$x_1 \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} + x_2 \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T^{-1}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Die Matrix $T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ transformiert einen Vektor aus der Basis $\mathcal{B}'$ in die Basis $\mathcal{B}$. Wir wollen jedoch die Transformation von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Dafür nehmen wir einfach die Inverse.

Allgemein gilt für beliebige Basen $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

$$\boxed{T_{Q\to W} = \left([q_1]_W, [q_2]_W, \dots, [q_n]_W\right)}$$

$$\boxed{[v]_W = T_{Q\to W}\,[v]_Q}$$

$$\boxed{T_{Q\to W} = T^{-1}_{W\to Q}}$$

Darstellungsmatrizen:

Sei A eine Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung in der Basis q. Dann gilt:

$$[A]_q\,[x]_q = [y]_q$$

wir suchen nun die Darstellungsmatrix der gleichen Abbildung in der Basis ω. Also:

$$[A]_\omega\,[x]_\omega = [y]_\omega$$

Durch umformen erhalten wir:

$$\boxed{[A]_\omega = T_{Q\to W}\,[A]_q\,T^{-1}_{Q\to W}}$$

Bei einer genauen Betrachtung fällt folgendes auf:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

$$T_{Q\to W}\,[A]_q\,T^{-1}_{Q\to W}\,[x]_\omega = [y]_\omega$$

Transformation des Eingabevektor zu Basis q.

Abbildung in Basis q

Rücktransformation zu Basis ω

Diagonalisierung:

Für Abbildungen ist es vorteihaft wenn die Abbildungsmatrix diagonal ist, da Diagonalmatrizen leicht invertierbar sind und Matrixmultiplikation einfacher ist. Beim Diagonalisieren wollen wir also einen Basiswechsel machen, so dass die Matrix in der neuen Basis diagonal ist.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wollen wir also eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ finden, so dass:

$$T^{-1} A\, T = D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

D ist dann die Abbildung A in einer neuen Basis.

Bei Diagonalmatrizen werden Basisvektoren nur um Skalare von der Diagonalen skaliert. D.h. die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Wir wählen also die Eigenvektoren der ursprünglichen Matrix als neue Basis. Der Faktor mit welchem skaliert wird sind genau die Eigenwerte.

Die Übergangsmatrix T enthält dann als Spalten die EV von A. Die Diagonalmatrix D muss nun auf der Diagonalen die EW von A haben. D.h. $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

Da wir für eine Diagonalisierung $T^{-1} A\, T = D$, T^{-1} brauchen muss T regulär sein.

Auf eurer Zusammenfassung steht aber:

6.6 Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$\boxed{A \text{ halbeinfach} \iff A \text{ diagonalisierbar}}$

Was bedeutet es für eine Matrix wenn sie halbeinfach ist?

$\boxed{\text{Eine Matrix } A \text{ ist halbeinfach wenn jedes } \lambda \text{ alg Vfh.} = \text{g. Vfh.}}$

In anderen Worten: Jeder EW λ_i (mit Vfh. gezählt) hat einen EV welcher linear unabhänig von allen anderen EV ist. Deshalb gilt auch:

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n \iff$ die Matrix ist halbeinfach.

Recall:

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent:

- A ist invertierbar/regulär
- Zeilen/Spalten sind linear unabhänig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Dadurch, dass A halbeinfach ist garantieren wir dass T regulär ist und somit ist A diagonalisierbar.

<u>Spezialfall:</u> Symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch dann gilt:

- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis
- $\exists$ eine orthogonale Matrix T so dass, $T^{-1}AT = T^{T}AT$ diagonal ist.

<u>Anwendung:</u> Potenzen von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Berechne A^3

Da A diagonalisierbar ist gilt: $A = TDT^{-1}$

Nun ist $A^3 = A\cdot A\cdot A = (TD\underbrace{T^{-1})(T}_{I}D\underbrace{T^{-1})(T}_{I}DT^{-1}) = TD^3T^{-1} = T\,\mathrm{diag}(\lambda_1^3,\dots,\lambda_n^3)\,T^{-1}$

Generell gilt $\boxed{A^k = T\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)\,T^{-1}}$

Dadurch vereinfacht sich auch das Matrixexponential $\boxed{e^A = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\, T^{-1}}$

↳ durch einsetzen in $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Quadratische Formen:

Wir betrachten quadratische Funktionen in mehreren Variablen. Z.B. in zwei Variabeln.

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass diese Funktion auch mit einer Matrix beschrieben werden kann

$$q(x_1, x_2) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hier ist nun $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ die quadratische Form von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein können wir für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die dazugehörige quadratische Form finden. Sie ist wie folgt definiert: $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{aligned} q_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}}$$

Die Koeffizienten a_{ij} lassen sich für 2 bzw. 3 Variabeln wie folgt finden:

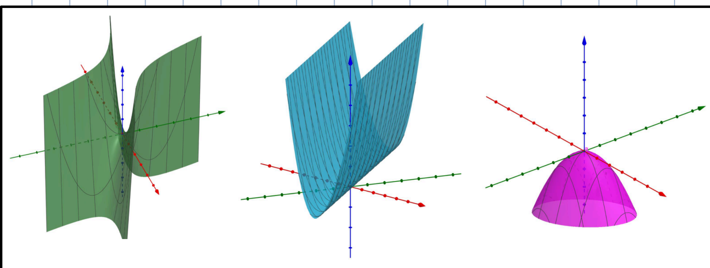
$\mathbb{R}^2$:

$$q_A(\underline{x}) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2dx_1x_2 + bx_2^2$$

$\mathbb{R}^3$:

$$q_A(\underline{x}) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3$$

Je nach Matrix kann die quadratische Form graphisch anders aussehen. Bsp. für 2 Variabeln.



$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ $\quad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ $\quad$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow -x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2$

Definitheit:

Die unterschiedlichen quadratischen Formen lassen sich klassifizieren.

10.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0 \; \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

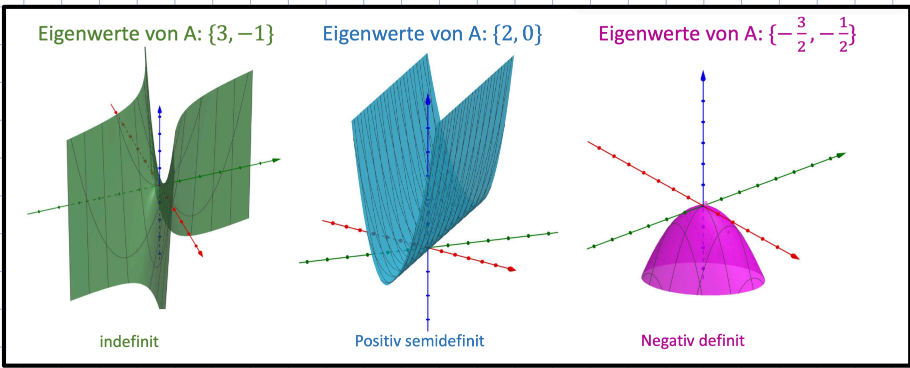
Um die Definitheit einer quadratische Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A

10.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte

Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:

- positiv definit: Alle $\lambda > 0$
- negativ definit: Alle $\lambda < 0$
- positiv semidefinit: Alle $\lambda \geqslant 0$
- negativ semidefinit: Alle $\lambda \leqslant 0$
- indefinit: sonst

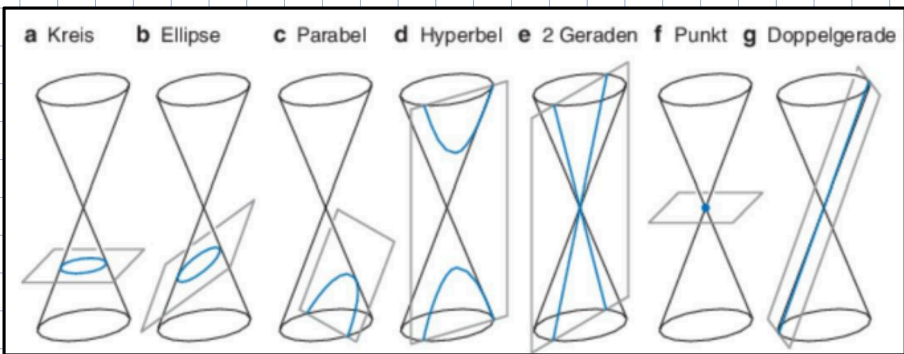


Kegelschnitte:

Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{ x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1 \}$$

ein Kegelschnitt. Verschiedene symmetrische Matrizen liefern einen dieser Kegelschnitte.



Wenn die Matrix A diagonal ist, dann sind die Koordinatenachsen parallel mit den Hauptachsen des Kegelschnitts. Ein Kegelschnitt im Hauptachsensystem können wir in Normalform bringen.

Die Normalformen aller Kegelschnitte sind:

Rang$(A) = 2$:

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Ellipse/Kreis
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Hyperbel
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$	leere Menge
$x^2 + \beta^2 y^2 = 0$	Punkt
$x^2 - \beta^2 y^2 = 0$	sich schneidendes Geradenpaar

Rang$(A) = 1$:

$x^2 - \gamma y = 0$	Parabel
$x^2 - \alpha^2 = 0$	paralleles Geradenpaar
$x^2 + \alpha^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Gerade

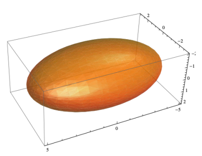
wobei α, β, γ alle $\neq 0$.

Quadriken:

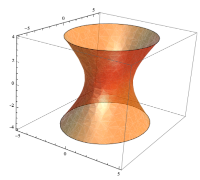
Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{ x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1 \}$$

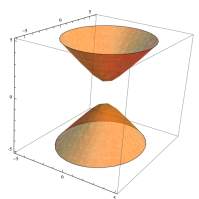
eine Quadrik oder Fläche 2. Grades. Verschiedene quadratische Formen liefern verschiedene Quadriken in ihrem Hauptachsensystem. Hier einige ausgewählte Beispiele:



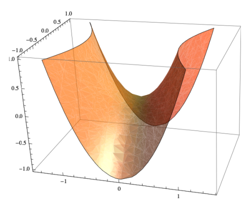
Ellipsoid
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$



einschaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$



zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0$



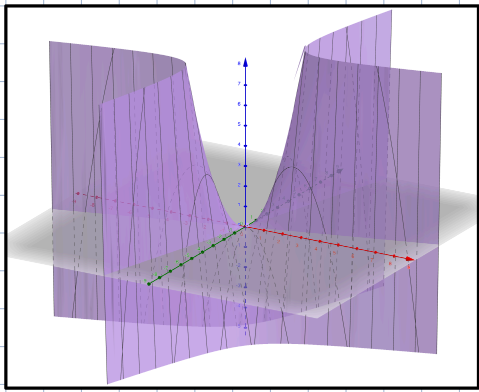
hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \gamma z = 0$

Wie bringen wir nun eine quadratische Form in die entsprechenden Normalformen?

Hauptachsentransformation:

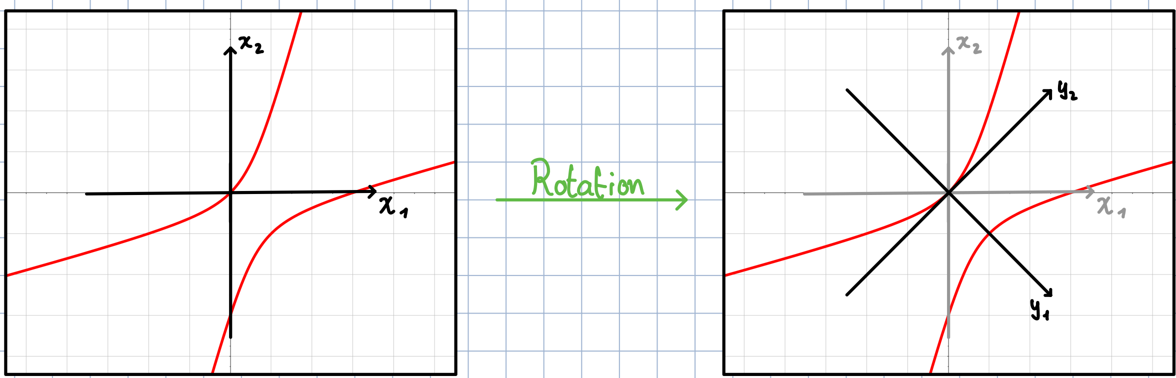
Im Grunde müssen wir eine Rotation und Verschiebung machen. Betrachten wir das Ganze an dem Beispiel.

Die quadratische Form $q(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$ sieht im 3-D Raum wie folgt aus:



Der Kegelschnitt Q beschreibt die Schnittmenge von $q(x)$ mit einer Ebene. Diesen Kegelschnitt können wir in 2-D gut visualisieren.

Zuerst rotieren wir den Kegelschnitt damit die Hauptachsen mit den Koordinatenachsen übereinstimmen / parallel sein.

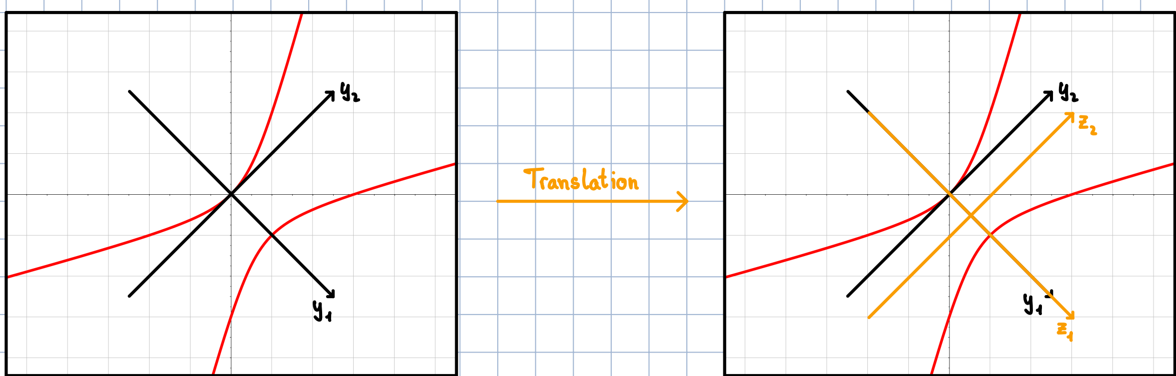


$Q(x): -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 = 0$

Durch einen Basiswechsel $x = Ty$ sind unsere neuen Basisvektoren parallel zu den Hauptachsen. In dieser Basis y ist die Matrix A diagonal da wir im Hauptachsensystem sind.

Wir müssen also A diagonalisieren um T zu finden.

Um die Normalform zu erhalten mussen wir noch den y_1-Term eliminieren, das entspricht einer Translation.

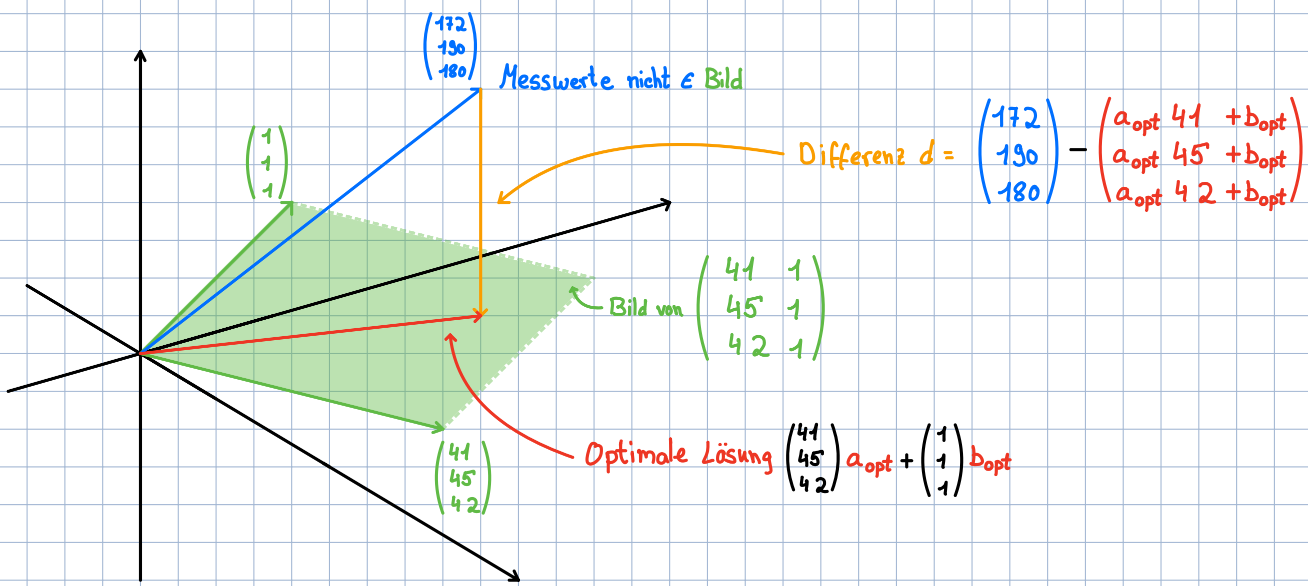


Methode der kleinsten Quadrate:

Kurz gesagt: Wie können wir eine möglichst gute Lösung für ein $\underbrace{\text{überbestimmtes LGS}}_{\text{mehr Gleichungen als Unbekannte. } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ mit } m>n}$ $Ax=c$ finden?

Betrachen wir dafür das Ganze graphisch mit 3 Gleichungen.

$$\begin{aligned} 172 &= a\,41 + b \\ 190 &= a\,45 + b \\ 180 &= a\,42 + b \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



nicht Massstäblich

Wir wollen nun die Länge des Differenzvektors minimieren:

$$\|d\| = \sqrt{(172-(a\,41+b))^2 + (190-(a\,45+b))^2 + (180-(a\,42+b))^2}$$

Wie finde ich nun a und b, so dass die Differenz minimal ist?

$$A \cdot y \perp d \qquad \text{(Bild von } A \text{ orthogonal zu } d\text{)}$$

$$\langle A \cdot y, d \rangle = 0$$

$$(A \cdot y)^T \cdot d = 0 \qquad \text{(Skalarprodukt ausgeschrieben)}$$

$$y^T A^T \left(c - A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} \right) = 0 \qquad (d \text{ eingesetzt})$$

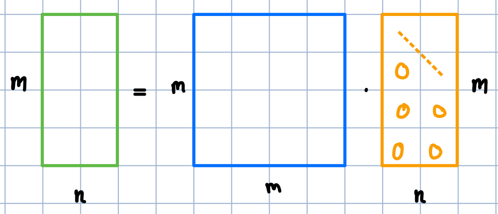
$$y^T A^T c - y^T A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} = 0$$

$$A^T c = A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A^T A)^{-1} A^T \cdot c = \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}}$$

QR-Zerlegung:

Idee: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$



Anwendung: Die QR-Zerlegung wird für ein alternatives Lösungsverfahren der kleinsten Quadrate gebraucht, welches numerisch bessere Resultate liefert.

Differentialgleichungssysteme:

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Solche Gleichungen sind bereits aus der Analysis bekannt. Allgemein ist eine solche Differentialgleichung gegeben durch: $y'(t) = a\,y(t) \quad (a \in \mathbb{R}, \text{konstant})$

Mit der Lösung: $y(t) = c\, e^{at}, \; c \in \mathbb{R}$

Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung $\{ y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = a y \}$ ist ein 1-D UR von den 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathbb{R})$.

Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

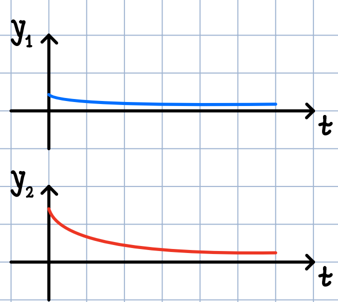
Genau wie wir auch schon in LinAlg I sahen, können wir Gleichungen in einen System beschreiben. Das geht auch mit DGL's. Betrachten wir dafür ein Beispiel:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2\, y_1(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -4\, y_2(t) & y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Dieses System ist entkoppelt da beide Gleichungen unabhänig von einander sind. Dadurch können wir sie auch separat lösen.

$y_1(t) = y_1(0)\, e^{-2t} = e^{-2t}$

$y_2(t) = y_2(0)\, e^{-4t} = 3 e^{-4t}$



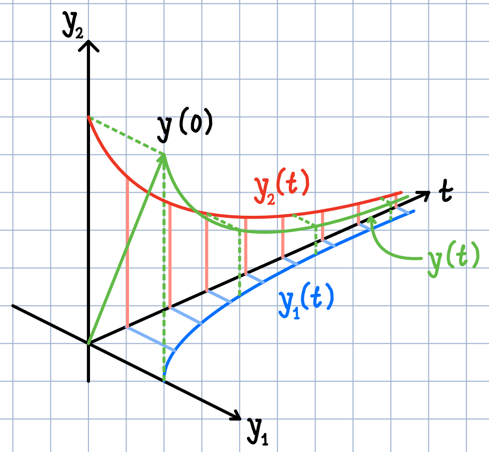
Wir können solche Systeme in Matrixschreibweise ausdrücken.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow y(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Generell können wir jedes System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kompakt mit Matrizen darstellen.

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ \dots &= \dots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{aligned} \longrightarrow Y' = AY \quad \text{mit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie herkömmliche Linearkombinationen vorstellen, bloss das jetzt alles auch von t abhängt

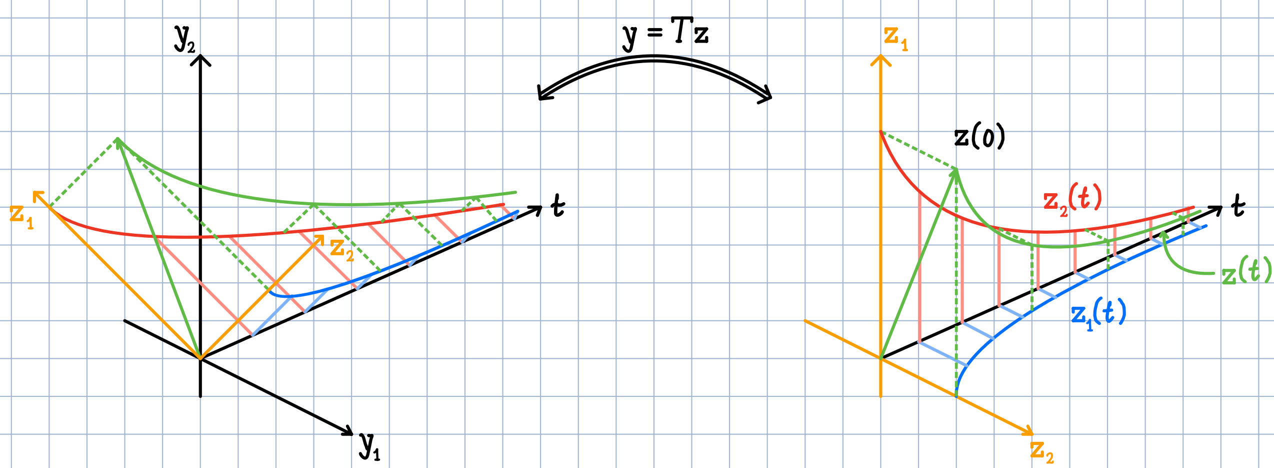


Es kann aber auch sein, dass die Gleichungen abhänig von einander sind, beispielsweise:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4\, y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = -2\, y_1(t) - 3\, y_2(t) \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{Das können wir nicht mehr direkt lösen.}}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Durch das diagonalisieren können wir unser Differentialgleichungssystem wie oben lösen.

Wir führen also einen Basiswechsel $y = Tz$ in die Eigenbasis durch



Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Zum lösen von Differentialgleichungen höherer Ordnung machen wir eine Substitution und erhalten ein homogenes lineares System 1. Ordnung

$$y'''(t)+4y''(t)+2y'(t)-3y(t)=0$$

Substitution:

$$y_0 := y \qquad y_1 = y_0'$$

$$y_1 := y' \qquad y_2 = y_1'$$

$$\left.\begin{array}{l} y_2 := y'' \\ y_3 := y''' \end{array}\right\} y_3 = y_2'$$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{y_2'(t)+4y_2(t)+2y_1(t)-3y_0(t)=0}_{\text{DGL 1. Ordnung mit 3 Variabeln.}}$$

Damit die Informationen der Substitution nicht verloren gehen, werden Sie mit Gleichungen in das System eingebunden

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = 3y_0 - 2y_1 - 4y_2$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Sidenote: Die Substituition funktioniert auch bei nicht konst. Koeffizienten und inhomogenen Gleichungen.