Übung 14 (31.05.24)

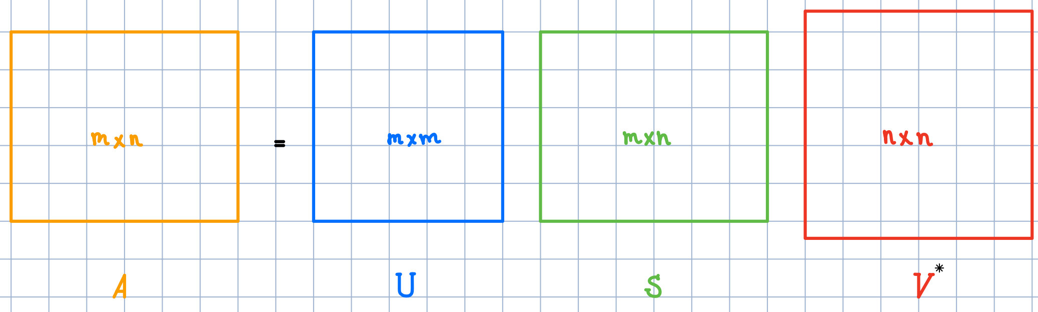
Singulärwertzerlegung

Mit den Eigenwerten und Eigenvektoren haben wir gelernt quadratische, halbeinfache Matrizen zu diagonalisieren. Dadurch bringen wir sie in eine Basis inder die Matrix diagonal ist. Nun sind viele Matrizen weder halbeinfach noch quadratisch, können wir trotzdem, für jede beliebige Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Transformation machen damit die neue Darstellungsmatrix besonders "einfach" wird?

Die Idee ist es eine Transformation / Zerlegung durchzuführen die folgende Form hatt.

$U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = USV^*$$



Dabei sind U und V unitäre Matrizen. D.h. diese Matrizen erfüllen die folgende Eigenschaft:

$$U^*U = \mathbb{I} \qquad V^*V = \mathbb{I}$$

wobei U^* die konjugiert transponierte von U ist. $U^* = \bar{U}^T$. Insbesondere gilt dann für eine reelle Matrix R:

$$R^* = R^T \quad \text{und dadurch} \quad R^T R = \mathbb{I}$$

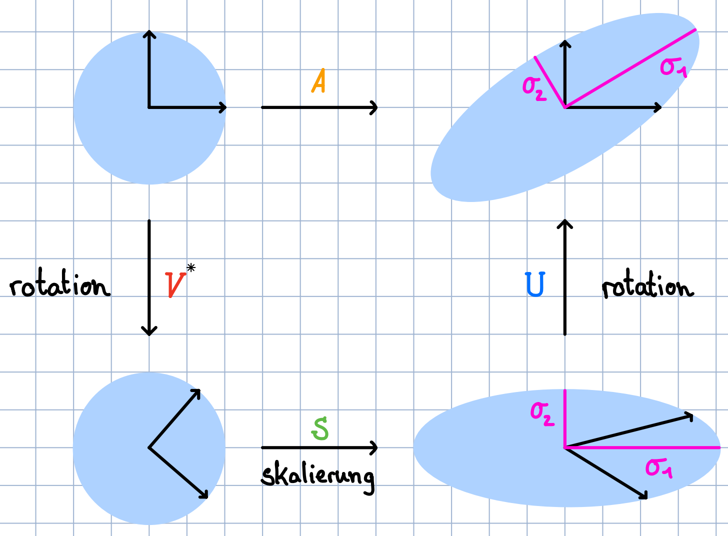
$$R \text{ unitär} \Leftrightarrow R \text{ orthogonal}$$

Die Matrix S hat eine besondere Form:

$$S = \left[\begin{array}{ccc|cc} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

Die Werte spielen wie beim Diagonalisieren eine wichtige Rolle. $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ werden Singulärwerte genannt. Diese können wir uns gut geometrisch vorstellen.

Dafür betrachten wir wie der Einheitskreis durch A abgebildet wird. D.h. wie alle Vektoren der Länge 1 abgebildet werden: Bsp für reelle 2x2 Matrix.



σ_1, σ_2 sind nun die maximalen resp. minimalen Streckungsfaktoren um welche unserer Einheitskreis gestreckt wird. Für $y = Ax$ kann das mathematisch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sigma_{min}(A) \leq \frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \sigma_{max}(A)$$

N.B.: Die Singulärwerte sind die Quadratwurzeln von den Eigenwerten von A^*A

Diese Singulärwerte spielen in vielen Anwendungen eine grosse Rolle. Einige Beispiele:

→ Control Systems (MIMO-Systeme)

→ Pseudo-Inversen von Matrizen berechnen

→ Gesichtserkennung

→ Image compression

→ Data analysis (Principal component analysis)

→ etc.

Beispielaufgabe

1.) <u>MC:</u>

> Welche der folgenden Teilmengen ist *kein* Untervektorraum?
>
> (a) $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$
>
> (b) $\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^T = A\} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
>
> (c) $\{p \in \mathcal{P}_3 \mid p(1) = 0 \text{ und } p(1100) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$, wobei $\mathcal{P}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ der Vektorraum der Polynome mit Grad $\leq n$ ist.
>
> (d) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| = |x_3|\} \subset \mathbb{R}^3$

4.2 Definition Unterraum

Eine nichtleere Teilmenge eines Vektorraums V heisst Unterraum von V, falls:

1. $\forall a, b \in U: \quad a \oplus b \in U$
2. $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \quad \alpha \odot a \in U$

- Ein Unterraum ist selber ein Vektorraum.
- Ein Unterraum **muss den Nullvektor enthalten!**

Immer prüfen ob Nullvektor enthalten ist! Danach Bedingung 1.) und 2.)

a.) $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$

✓ Enthält Nullvektor. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

✓ Abgeschlossen bez. Addition $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}$

✓ Abgeschlossen bez. Multiplikation $\alpha \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

→ Ist UR

b.) ✓ Enthält Nullvektor. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

✓ Abgeschlossen bez. Addition $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_{11}&b_{21}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{21}+b_{21}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{21}+b_{21}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}^T$

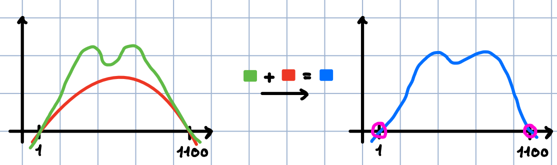
✓ Abgeschlossen bez. Multiplikation $\alpha \cdot \begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}^T \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

→ Ist UR

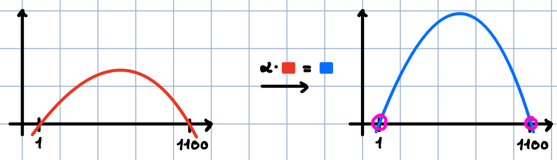
c.) ✓ Enthält Nullvektor. $p_0 = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$

$p_0(1) = 0 \quad , \quad p_0(1100) = 0$

✓ Abgeschlossen bez. Addition



✓ Abgeschlossen bez. Multiplikation



→ Ist UR

d.) ✓ Enthält Nullvektor. $|0| + |0| = |0|$

× Abgeschlossen bez. Addition $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow |1| + |-1| = 2 \neq 0$

→ kein UR